Class Field Theory Statements

Δημήτριος Νούλας

Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Τμήμα Μαθηματικών

Περιεχόμενα

Class Field Theory

Class Field Theory can be summarized in the following: if K is a local or global field, then the structure of all abelian extensions of K is explicitly determined by the arithmetic inside of K.

Για τα επόμενα μέχρι LCFT ακολουθώ το εισαγωγικό paper του Bowen Wang. Μετά τις διαλέξεις από MIT:

L/K πεπερασμένη επέκταση σωμάτων αριθμών. $\mathfrak{P}$ πρώτος του L που στέκεται πάνω από τον πρώτο $\mathfrak{p}$ του K.

$$1 \longrightarrow I_{\mathfrak{P}} \longrightarrow D_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(\mathcal{O}_L/\mathfrak{P} \Big/ \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\right) \longrightarrow 1$$

$$D_{\mathfrak{P}} = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) : \quad \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}$$

$$D_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(\mathcal{O}_L/\mathfrak{P} \Big/ \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\right)$$
$$\sigma \longmapsto \overline{\sigma}$$
$$y \mod \mathfrak{P} \longmapsto \sigma(y) \mod \mathfrak{P}$$

με πυρήνα

$$I_{\mathfrak{P}} = \{\sigma \in D_{\mathfrak{P}} : \quad \sigma(x) - x \in \mathfrak{P}, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{O}_L\}$$

Όταν L/K Galois οι ομάδες εξαρτώνται μόνο από το $\mathfrak{p}$ του K καθώς η $\mathrm{Gal}(L/K)$ δρα μεταβατικά στους πρώτους πάνω από αυτό. Όταν L/K αδιακλάδιστη, δηλαδή $I_{\mathfrak{p}} = 1$ έχουμε

$$D_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Gal}\left(\mathcal{O}_L/\mathfrak{P} \Big/ \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\right)$$

και η δεύτερη είναι κυκλική ως ομάδα Galois πεπερασμένων σωμάτων, με γεννήτορα τον Frobenius

$$x \mod \mathfrak{P} \longmapsto x^q \mod \mathfrak{P}, \quad \text{όπου } q = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}|$$

Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε από τον ισομορφισμό καλά ορισμένο $\sigma \in D_{\mathfrak{p}}$ (και όχι κλάση συζυγίας στοιχείων σε μη αδιακλάδιστη επέκταση). με $\sigma(x) = x^q \mod \mathfrak{P}$. Αυτό το στοιχείο το συμβολίζουμε με

$$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]$$

και για $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ ισχύει ότι

$$\left[\frac{L/K}{\tau(\mathfrak{P})}\right] = \tau \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right] \tau^{-1}$$

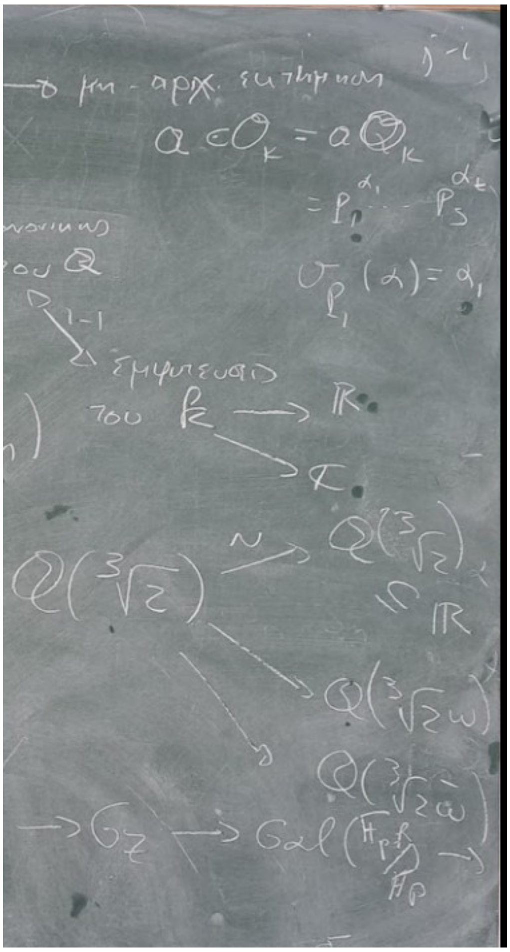
όπου για L/K αβελιανή αυτό εξαρτάται πλέον μόνο από τον πρώτο $\mathfrak{p}$, το οποίο πλέον είναι ως ορισμός το Artin symbol:

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)$$

$$x \mod \mathfrak{P} \longmapsto x^q \mod \mathfrak{P}$$

με τάξη f τον βαθμό αδράνειας της επέκτασης.

Πεπερασμένοι πρώτοι του $\mathcal{O}_K$: τα πρώτα ιδεώδη
Άπειροι πρώτοι: $K \hookrightarrow \mathbb{C}$, πραγματικός αν $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ ή ζεύγος μιγαδικών $\sigma, \overline{\sigma} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ με $\sigma \neq \overline{\sigma}$.



Έστω K σώμα αριθμών. Για να μπορούμε να λογαριάζουμε σχέσεις $\mod$ άπειρους πρώτους και πεπερασμένους, λέμε modulus του K ένα τυπικό γινόμενο:

$$\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$$

με $n_{\mathfrak{p}} \geq 0$ για πεπερασμένο πρώτο $\neq 0$. $n_{\mathfrak{p}} = 0$ για μιγαδικό άπειρο πρώτο και $n_{\mathfrak{p}} \leq 1$ για πραγματικό άπειρο πρώτο. Άρα modulus $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{m}_\infty$ όπου $\mathfrak{m}_0$ είναι $\mathcal{O}_K$-ιδεώδες και $\mathfrak{m}_\infty$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πραγματικών άπειρων πρώτων. Αν $n_{\mathfrak{p}} = 0$ για όλους τους πρώτους λέμε $\mathfrak{m} = 1$.

Για να διατηρούμε το αδιακλάδιστο της υπόθεσης, κρατάμε για modulus $\mathfrak{m}$ ως $I_K^{\mathfrak{m}}$ την ομάδα κλασματικών ιδεωδών σχετικά πρώτα με το $\mathfrak{m}$ και $R_K^{\mathfrak{m}}$ την υποομάδα της που παράγεται από τα κύρια $a\mathcal{O}_K$, όπου $a \in \mathcal{O}_K$ και ισχύουν

$$a \equiv 1 \mod \mathfrak{m}_0$$

και $\sigma(a) > 0$ για κάθε πραγματικό πρώτο που διαιρεί το $\mathfrak{m}_\infty$.

Λέμε H congruence υποομάδα για το $\mathfrak{m}$:

$$R_K^{\mathfrak{m}} \subset H \subset I_K^{\mathfrak{m}}$$

και το πηλίκο

$$I_K^{\mathfrak{m}}/H$$

γενικεύει την ομάδα κλάσεων ιδεωδών, αφού για $\mathfrak{m} = 1$ παίρνουμε τον κλασικό ορισμό της. Βασιζόμενοι στο σύμβολο του Artin ορίζουμε το Artin map:

Έστω $\mathfrak{m}$ που διαιρείται από όλους τους διακλαδιζόμενους πρώτους μιας αβελιανής επέκτασης L/K. Έστω $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$ τότε ορίζεται το σύμβολο

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) \in \mathrm{Gal}(L/K)$$

και παίρνουμε πολλαπλασιαστικά το Artin map:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{m}} : I_K^{\mathfrak{m}} &\longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \\ \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}} &\longmapsto \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)^{n_{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

Θεώρημα 1.1 (Artin Reciprocity)**.** *Έστω L/K αβελιανή επέκταση, $\mathfrak{m}$ που διαιρείται από κάθε διακλαδιζόμενο πρώτο της επέκτασης (άπειρο είτε πεπερασμένο). Τότε:*

(1) *Το Artin map $\Psi_{\mathfrak{m}}$ είναι επί.*

(2) *Αν οι εκθέτες των πεπερασμένων πρώτων που διαιρούν το $\mathfrak{m}$ είναι αρκετά μεγάλοι (υπάρχει έννοια μερικής διάταξης και ςονδυςτορ) τότε το $\ker \Psi_{\mathfrak{m}}$ είναι congruence υποομάδα για το $\mathfrak{m}$, δηλαδή:*

$$R_K^{\mathfrak{m}} \subset \ker \Psi_{\mathfrak{m}} \subset I_K^{\mathfrak{m}}$$

που επάγει ισομορφισμό:

$$I_K^{\mathfrak{m}}/\ker \Psi_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Gal}(L/K)$$

και άρα η ομάδα $\mathrm{Gal}(L/K)$ είναι γενικευμένη ομάδα κλάσεων ιδεωδών.

Θεώρημα 1.2 (Conductor)**.** *Έστω L/K αβελιανή επέκταση σωμάτων αριθμών, τότε υπάρχει modulus $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(L/K)$:*

(1) *Αν $\mathfrak{p}$ πρώτος του K (άπειρος είτε πεπερασμένος), τότε διακλαδίζεται αν και μόνο αν διαιρεί το $\mathfrak{f}$.*

(2) *Έστω $\mathfrak{m}$ να διαιρείται από όλους τους διακλαδιζόμενους πρώτους στην L/K, τότε $\ker(\Psi_m)$ είναι congruence υποομάδα αν και μόνο αν $\mathfrak{f} \mid \mathfrak{m}$.*

Το $\mathfrak{f}$ καθορίζεται μοναδικά από την επέκταση L/K, το οποίο ονομάζουμε conductor της L/K.

Θεώρημα 1.3 (Ύπαρξης)**.** *Έστω $\mathfrak{m}$ modulus του K και H congruence υποομάδα για το $\mathfrak{m}$. Τότε υπάρχει μοναδική αβελιανή επέκταση L/K με όλους τους διακλαδιζόμενους πρώτους (άπειρους και πεπερασμένους) να διαιρούν το $\mathfrak{m}$, έτσι ώστε για το Artin map:*

$$\Psi_{\mathfrak{m}} : I_K^{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

να ισχύει ότι $\ker(\Psi_{\mathfrak{m}}) = H$.

Πόρισμα 1.4 (Από τα τρία Θεωρήματα)**.** *Αν $M/K, L/K$ αβελιανές επεκτάσεις, τότε $L \subset M$ αν και μόνο αν υπάρχει modulus $\mathfrak{m}$ που διαιρείται από όλους τους πρώτους του K που διακλαδίζονται είτε στο M είτε στο L, τέτοιο ώστε*

$$R_K^{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Psi_{M/K}^{\mathfrak{m}}) \subset \ker(\Psi_{L/K}^{\mathfrak{m}})$$

Λήμμα 1.5. *L/K αβελιανή, $\mathfrak{m}$ το οποίο επιτρέπει να ορίσουμε Artin map $\Psi_{\mathfrak{m}}$. Αν $\mathfrak{n}$ είναι modulus με $\mathfrak{m} \mid \mathfrak{n}$, τότε*

$$R_K^{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Psi_{\mathfrak{m}}) \implies R_K^{\mathfrak{n}} \subset \ker(\Psi_{\mathfrak{n}})$$

Πόρισμα 1.6 (Θεώρημα Kronecker - Weber)**.** *L/K αβελιανή, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος m έτσι ώστε $L \subset \mathbb{Q}(\zeta_m)$.*

Νόμος αντιστροφής γιατί γενικεύουμε (;) τον τετραγωνικό νόμο αντιστροφής:

Θεώρημα 1.7. *Έστω p, q διακεκριμένοι περιττού πρώτοι στο $\mathbb{Z}$, τότε*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κυκλοτομική επέκταση $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$. Εφόσον $p \neq q$ το $x^p - 1$ είναι διαχωρίσιμο mod$q$ καθώς $\gcd(x^p-1, px^{p-1}) = 1$. Άρα το q είναι αδιακλάδιστο στην επέκταση $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Επιπλέον τα $1, \zeta, \cdots, \zeta^{p-1}$ είναι διακεκριμένα mod$q$. Από τον ορισμό του συμβόλου του Artin:

$$\left(\frac{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}{q}\right)(\zeta) \equiv \zeta^q \mod q$$

και άρα από μοναδικότητα το σύμβολο του Artin είναι η απεικόνιση $\zeta \mapsto \zeta^q$..... □

Το θεώρημα ύπαρξης για $\mathfrak{m} = 1$ μας δίνει ότι υπάρχει μοναδική αβελιανή αδιακλάδιστη επέκταση L/K με το Artin map να είναι ισομορφισμός:

$$Cl(\mathcal{O}_K) = I_K/R_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

Το L αυτό το ονομάζουμε Hilber class field του K και είναι (όπως το διαλέξαμε) αδιακλάδιστο για όλους τους πεπερασμένους και άπειρους πρώτους.

Θεώρημα 1.8. *Το Hilbert σώμα κλάσεων L είναι η μέγιστη αδιακλάδιστη αβελιανή επέκταση του K.*

Πόρισμα 1.9 (Principal ideal Theorem)**.** *L/K το Hilbert class field και $\mathfrak{p}$ πρώτος του K. Το $\mathfrak{p}$ διασπάται πλήρως στο L αν και μόνο αν το $\mathfrak{p}$ είναι κύριο ιδεώδες.*

(Το αντίστοιχο σε knots από Γκουνταρούλη & Κοντογεώργη.)

Απόδειξη.

$$e = 1, \quad f = 1, \quad r = [L : K]$$

Το $\mathfrak{p}$ διασπάται πλήρως σημαίνει τα παραπάνω, δηλαδή από το $f = 1$ έχουμε ότι το σύμβολο Artin $\left(\frac{L/K}{p}\right)$ είναι τετριμμένο και κάτω από τον ισομορφισμό του Artin map

$$Cl(\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$$

έχουμε $\left(\frac{L/K}{p}\right) = 1$ αν και μόνο αν αντιστοιχεί στην τετριμμένη κλάση της ομάδας κλάσεων, δηλαδή είναι κύριο. □

Όπως τα έχουμε ορίσει το
$$Cl_K^{\mathfrak{m}} := I_K^{\mathfrak{m}}/R_K^{\mathfrak{m}}$$
είναι το ray class field και το L/K που είναι αδιακλάδιστο σε όλες τις θέσεις που δεν είναι στο support του $\mathfrak{m}$, για το οποίο ο πυρήνας του Artin map $\Psi_{L/K}^{\mathfrak{m}} : I_K^{\mathfrak{m}} \to \mathrm{Gal}(L/K)$ είναι το ray group $R_K^{\mathfrak{m}}$, λέγεται ray class field και καθορίζεται πλήρως από το $\mathfrak{m}$.

Αν θεωρήσουμε ότι $\mathfrak{m}(\nu) = 1$ για τους πραγματικούς πρώτους, το $Cl_K^{\mathfrak{m}}$ που κρατάμε λέγεται narrow ray class group, δηλαδή κοιτάμε διακλάδωση μόνο στους πεπεπερασμένους πρώτους.

Παράδειγμα:

$$K = \mathbb{Q}, \mathfrak{m} = (5)$$
$$I_K^{\mathfrak{m}} = \left\{(1), \left(\frac{1}{2}\right), (2), \left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{2}\right), (3), \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}\right), \left(\frac{4}{3}\right), (4), \left(\frac{1}{6}\right), (6), \dots\right\}$$
$$R_K^{\mathfrak{m}} = \left\{(1), \left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}\right), (4), \left(\frac{1}{6}\right), (6), \left(\frac{2}{7}\right), \left(\frac{7}{2}\right) \dots\right\}$$

Το $(2/3)$ είναι στο ray group καθώς $(-2/3) = (2/3)$ και $-2 \equiv 3 \mod 5$, δηλαδή $\frac{-2}{3} \equiv 1 \mod 5$.

$$Cl_K^{\mathfrak{m}} = \{[(1)], [(2)]\} \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\} \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)^+/\mathbb{Q})$$
θυμόμαστε ότι το $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ είναι η ομάδα Galois τάξης 4 του $\mathbb{Q}(\zeta_5)$. Δηλαδή, $\mathbb{Q}(\zeta_5)^+$ είναι το ray class field για αυτό το $\mathfrak{m}$.

Αν $\mathfrak{m} = (5)\infty$ τότε $R_K^{\mathfrak{m}} = \{(1), (6), \left(\frac{1}{6}\right), \left(\frac{2}{7}\right), \left(\frac{7}{2}\right), \dots\}$ και άρα ray class field είναι το $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ με
$$Cl_K^{\mathfrak{m}} \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$$

Θεώρημα 1.10. *Έστω $\mathfrak{m}$ modulus, K σώμα αριθμών, τότε η παρακάτω ακολουθία είναι αρκιβής (snake lemma):*

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times \cap K^{\mathfrak{m},1} \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times \longrightarrow K^{\mathfrak{m}}/K^{\mathfrak{m},1} \longrightarrow Cl_K^{\mathfrak{m}} \longrightarrow Cl_K \longrightarrow 1$$

όπου τα $K^{\mathfrak{m}} \subset K^\times$ είναι η υποομάδα για τα $a \in K^\times$ έτσι ώστε $(a) \in I_K^{\mathfrak{m}}$ και $K^{\mathfrak{m},1}$ είναι τα $a \in K^{\mathfrak{m}}$ για τα οποία έχουμε το $\equiv 1 \mod \mathfrak{m}_0$ και την συνθήκη totally real για τους άπειρους πρώτους, δηλαδή το ray group είναι τα κύρια rays, δηλαδή $(a) \in R_K^{\mathfrak{m}}$ αν είναι στο $I_K^{\mathfrak{m}}$ και $a \in K^{\mathfrak{m},1}$.

Επιπλέον, έχουμε canonical ισομορφισμό
$$K^{\mathfrak{m}}/K^{\mathfrak{m},1} \cong \{\pm 1\}^{\#\mathfrak{m}_\infty} \times (\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_0)^\times$$

Προσπαθούμε να πετυχαίνουμε τις ενδιάμεσες επεκτάσεις L/K του ray class field $K(\mathfrak{m})/K$ αντιστοιχίζοντας σε congruence subgroups. Περιμένουμε τα congruence subgroups να είναι πυρήνες Artin maps για κατάλληλα L/K και $\mathfrak{m}$.

Παράδειγμα:

$$K = \mathbb{Q}, \quad L = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 3x - 1)$$
διακλάδωση στο 3, άρα το Artin map είναι καλά ορισμένο για τα moduli που δεν διαιρείται από το (3). Για $\mathfrak{m} = (3)$ όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα είχαμε ray class field $\mathbb{Q}(\zeta_3)^+ = \mathbb{Q}$ και για $\mathfrak{m} = (3)\infty$ το $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, κανένα από τα δύο δεν έχει σαν υπόσωμα το L, άρα το $\ker \Psi_K^{\mathfrak{m}}$ δεν περιέχει το $R^{\mathfrak{m}}$ για αυτά τα δύο $\mathfrak{m}$. Δηλαδή, δεν μπορεί να είναι congruence υποομάδα.

Αν $L = \mathbb{Q}(\zeta_9)^+$ είναι ray class field για $\mathfrak{m} = (9)$ και εδώ το $\ker(\Psi_{L/K}^{(9)})$ είναι congruence υποομάδα.

Norm map μεταξύ των ομάδων ιδεωδών:

$$N_{L/K} : I_L \longrightarrow I_K$$
$$\prod_i \mathfrak{q}_i^{n_i} \longmapsto \prod_i \mathfrak{p}_i^{n_i f_i}$$

με $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap \mathcal{O}_K$ και $f_i = [\mathbb{F}_{\mathfrak{q}_i} : \mathbb{F}_{\mathfrak{p}_i}]$ βαθμός των σωμάτων υπολοίπων.

Αν L/K πεπερασμένη αβελιανή επέκταση σωμάτων αριθμών και $\mathfrak{m}$ να διαιρείται από το conductor της L/K, το norm group που αντιστοιχεί στο $\mathfrak{m}$ είναι η congruence υποομάδα:

$$T_{L/K}^{\mathfrak{m}} = R_K^{\mathfrak{m}} N_{L/K}(I_L^{\mathfrak{m}})$$

όπου το $I_L^{\mathfrak{m}}$ είναι τα κλασματικά ιδεώδη σχετικά πρώτα με το $\mathfrak{m}\mathcal{O}_L$, αφού το $\mathfrak{m}$ είναι modulus του K.

Πρόταση 1.11. *L/K και $\mathfrak{m}$ όπως ακριβώς παραπάνω, τότε* $\ker \Psi_{L/K}^{\mathfrak{m}} \subseteq T_{L/K}^{\mathfrak{m}}$.

Μια από τις δύο θεμελιώδεις ανισότητες της θεωρίας κλάσεων σωμάτων:

Θεώρημα 1.12. *$L/K, \mathfrak{m}$ όπως παραπάνω, τότε*

$$[I_K^{\mathfrak{m}} : T_{L/K}^{\mathfrak{m}}] \leq [L : K]$$

έχοντας αυτό, ο νόμος αντιστροφής Artin ανάγεται στο να αποδειχθεί ότι $T_{L/K}^{\mathfrak{m}} \subseteq \ker \Psi_K^{\mathfrak{m}}$ για κάθε $\mathfrak{m}$ που διαιρείται από το conductor της L/K. Συνοψίζοντας:

<u>Κύρια Θεωρήματα Θεωρίας Κλάσεων Σωμάτων:</u>

- Ύπαρξη. Το ray class field $K(\mathfrak{m})$ υπάρχει.
- Πληρότητα. Αν L/K αβελιανή πεπερασμένη επέκταση τότε $L \subseteq K(\mathfrak{m})$ αν και μόνο αν το conductor $\mathfrak{c}(L/K) \mid \mathfrak{m}$. Είδικότερα, κάθε L/K πεπερασμένη αβελιανή περιέχεται σε ένα ray class field.
- Artin Reciprocity. Για κάθε υποεπέκταση L/K του $K(\mathfrak{m})$ έχουμε $\ker \Psi_{L/K}^{\mathfrak{m}} = T_{L/K}^{\mathfrak{m}}$ με conductor $\mathfrak{c}(L/K) \mid \mathfrak{m}$ και canonical ισομορφισμό

$$I_K^{\mathfrak{m}} / T_{L/K}^{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{Gal}(L/K)$$

Το Artin Reciprocity μας δίνει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα από canonical bijections:

$$\begin{tikzcd}
\{\text{abelian } L/K \quad \text{με } \mathfrak{c}(L/K) \mid \mathfrak{m}\} \arrow[r, "L \mapsto T_{L/K}^{\mathfrak{m}}"] \arrow[d, "L \mapsto \mathrm{Gal}(L/K)"'] & \{\text{conguence subroups } H \subseteq I_K^{\mathfrak{m}}\} \arrow[d, "H \mapsto I_K^{\mathfrak{m}}/H"] \\
\{\text{quotients} \quad \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{m})/K)\} & \{\text{quotients of } Cl_K^{\mathfrak{m}}\} \arrow[l, "\Psi_{L/K}^{\mathfrak{m}}"]
\end{tikzcd}$$

Local Class Field Theory

Υπενθύμιση: τοπικό σώμα είναι ένα τοπικά συμπαγές σώμα (κάθε σημείο έχει συμπαγής περιοχή) του οποίου η τοπολογία επάγεται από μια μη-τετριμμένη απόλυτη τιμή. Global σώμα είναι ένα σώμα αριθμών ή μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{F}_p(t)$. Η πλήρωση σε κάθε θέση ενός global δίνει ένα local.

Θεώρημα 2.1. *Κάθε τοπικό σώμα είναι ισόμορφο με ένα από τα παρακάτω:*

- $\mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$ *(για αρχιμήδειο πρώτο, χαρακτηριστική 0).*
- *Πεπερασμένη επέκταση του* $\mathbb{Q}_p$ *(για μη-αρχιμήδειο πρώτο, χαρακτηριστική 0).*
- *Πεπερασμένη επέκταση του* $\mathbb{F}_p((t))$ *(για μη-αρχιμήδειο πρώτο, χαρακτηριστική* $= p > 0$*).*

Στις μη-αρχιμήδειες περιπτώσεις ο δακτύλιος ακεραίων είναι DVR με πεπερασμένο σώμα υπολοίπων. Στόχος LCFT: Κατηγοριοποίηση των πεπερασμένων αβελιανών επεκτάσεων δοσμένου τοπικού σώματος K. Έστω K τοπικό σώμα με K^{sep}. Το σώμα:

$$K^{\text{ab}} := \bigcup_{L/K \ \text{ finite abelian}} L$$

για τα $L \subset K^{\text{sep}}$, είναι η μέγιστη αβελιανή επέκταση του K (μέσα στην K^{sep}).

$$K^{\text{unr}} = \bigcup_{L/K \ \text{ finite unramified}} L$$

για τα $L \subset K^{\text{sep}}$ είναι η μέγιστη αδιακλάδιστη επέκταση του K (μέσα στην K^{sep}).

$$K \subseteq K^{\text{unr}} \subseteq K^{\text{ab}} \subseteq K^{\text{sep}}$$

Σε αρχιμήδεια περίπτωση $K = K^{\text{unr}}$ είναι $\mathbb{R}$ είτε $\mathbb{C}$. $K^{\text{ab}} = K^{\text{sep}} = \mathbb{C}$ (αφού $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ διακλαδίζεται). Οπότε είναι να εξετάσουμε την μη-αρχιμήδεια περίπτωση.

Άπειρη θεωρία Galois:

(Λόγω αβελιανής επέκτασης L/K έχουμε οι παρακάτω ομάδες Galois να είναι κανονικές στο όριο)

$$\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \cong \varprojlim_L \text{Gal}(L/K)$$

έτσι $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ totally disconnected, συμπαγής. Αντιστοιχούμε επεκτάσεις του K μέσα στην K^{ab} σε κλειστές υποομάδες (πεπερασμένες επεκτάσεις αντιστοιχούν σε ανοικτές, και πεπερασμένου δείκτη λόγω συμπάγειας) της $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ με $L \mapsto \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L)$ και $H \mapsto (K^{\text{ab}})^H$.

Έστω K μη-αρχιμήδειο τοπικό σώμα, $\mathcal{O}_K$ ο δακτύλιος ακεραίων, μοναδικό μέγιστο ιδεώδες

$\mathfrak{p}$ και σώμα υπολοίπων $\mathbb{F}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Αν L/K πεπερασμένη αδιακλάδιστη επέκταση με σώμα υπολοίπων $\mathbb{F}_\mathfrak{q} = \mathcal{O}_L/\mathfrak{q}$, τότε υπάρχει (reference ;) κανονικός ισομορφισμός

$$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_\mathfrak{q}/\mathbb{F}_\mathfrak{p}) = \langle x \longmapsto x^{\#\mathbb{F}_\mathfrak{p}} \rangle$$

Και λέμε (όμοια με Artin symbol) το στοιχείο που απεικονίζεται στον γεννήτορα δεξιά ως $\mathrm{Frob}_{L/K} \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Είναι στοιχείο και όχι κλάση συζυγίας αφού η L/K είναι αβελιανή, δηλαδή κάθε finite unramified επέκταση τοπικών σωμάτων έρχεται με canonical γεννήτορα $\mathrm{Frob}_{L/K}$ για την ομάδα Galois της (κυκλική απαραίτητα). Έτσι, το local unramified setting για το Artin map είναι εύκολο:

I_K να είναι το ideal group που είναι εδώ άπειρη κυκλική με γεννήτορα το $\mathfrak{p}$.

$$\Psi_{L/K} : I_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto \mathrm{Frob}_{L/K}$$

αντιστοιχεί στο $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ με $n = [L : K]$.

Επειδή ο δακτύλιος ακεραίων είναι DVR και άρα PID κάθε ιδεώδες I είναι της μορφής (x) για κάποιο $x \in K^\times$, άρα δεν χάνουμε πληροφορία αν επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό ως:

$$\Psi_{L/K} : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$
$$\Psi_{L/K}(x) := \Psi_{L/K}((x))$$

και κάθε uniformizer π απεικονίζεται στο $\mathrm{Frob}_{L/K}$.

Θεώρημα 2.2 (Local Artin Reciprocity)**.** *Έστω K τοπικό σώμα, τότε υπάρχει μοναδικός συνεχής ομομορφισμός $\theta_K : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε L/K πεπερασμένη επέκταση μέσα στην K^{ab} η σύνθεση με την φυσική προβολή στο πηλίκο (ή απλά περιορισμός $\sigma \mapsto \sigma\mid_L$ ή αλλιώς προβολή στο L μέσα στο αντίστροφο όριο)* $\mathrm{res}_{L/K}$: $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \to \mathrm{Gal}(L/K)$

$$\theta_{L/K} : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Αν K μη αρχιμήδειο και L/K αδιακλάδιστη, τότε $\theta_{L/K}(\pi) = \mathrm{Frob}_{L/K}$ για κάθε π uniformizer του $\mathcal{O}_K$.*

(2) *$\theta_{L/K}$ είναι επιμορφισμός με πυρήνα $N_{L/K}(L^\times)$ που επάγει*

$$K^\times/N_{L/K}(L^\times) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$$

Διαφορές:

- Δεν υπάρχει modulus $\mathfrak{m}$, δουλεύοντας στην K^{ab} λογαριάζουμε όλες τις αβελιανές επεκτάσεις του K ταυτόχρονα.
- Στην θέση των ray class groups $Cl_K^\mathfrak{m}$ μπαίνουν τα πηλίκα της $K^\times$ (ως πολλαπλασιαστική ομάδα).
- Στην θέση των norm groups $N_{L/K}(I_L^\mathfrak{m})R_K^\mathfrak{m} \subseteq I_K^\mathfrak{m}$ μπαίνουν τα $N_{L/K}(L^\times) \subseteq K^\times$.

Ένα Norm group τοπικού σώματος K είναι μια υποομάδα της μορφής

$$N(L^\times) = N_{L/K}(L^\times) \subseteq K^\times$$

για κάποια πεπερασμένη αβελιανή επέκταση L/K. Το χωρίς αβελιανή δεν αλλάζει τον ορισμό, αν L/K πεπερασμένη επέκταση τότε $N(L^\times) = N(F^\times)$ για F μέγιστη επέκταση του K μέσα στο L με F/K αβελιανή (norm limitation theorem). Δηλαδή, τα norm groups δεν δίνουν πληροφορία για τις μη αβελιανές επεκτάσεις.

Το local reciprocity theorem μας λέει ότι οι ομάδες Galois των πεπερασμένων αβελιανών επεκτάσεων L/K τοπικών σωμάτων είναι canonically ισόμορφες με το $K^\times/N_{L/K}(L^\times)$. Άρα για να καταλάβουμε τις πεπερασμένες αβελιανές επεκτάσεις αρκεί να καταλάβουμε τα norm groups.

Πόρισμα 2.3. *$L \longmapsto N(L^\times)$ ορίζει inclusion reversing bijection μεταξύ πεπερασμένων αβελιανών L/K μέσα στην K^{ab} και τα norm groups έτσι ώστε*

$$N((L_1L_2)^\times) = N(L_1^\times) \cap N(L_2^\times)$$

$$N((L_1 \cap L_2)^\times) = N(L_1^\times)N(L_2^\times)$$

Ειδικότερα, κάθε norm group του K έχει πεπερασμένο δείκτη στο $K^\times$ και κάθε υποομάδα του $K^\times$ που περιέχει norm group είναι norm group.

L_1L_2 είναι το compositum δηλαδή η τομή όλων των επεκτάσεων που περιέχουν τα L_1, L_2 μέσα στην K^{ab}.

Λήμμα 2.4. *Έστω L/K επέκταση τοπικών σωμάτων. Αν $N(L^\times)$ είναι πεπερασμλενου δείκτη στο $K^\times$, τότε είναι ανοιχτό.*

Το πόρισμα λέει ότι κάθε norm group του K έχει πεπερασμένο δείκτη στο $K^\times$ και το λήμμα ότι όλα τα norm groups είναι πεπερασμένου δείκτη ανοιχτές υποομάδες του $K^\times$. Το θεώρημα ύπαρξης LCFT μας λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 2.5 (Local Existence Theorem)**.** *Έστω K τοπικό σώμα και H πεπερασμένου δείκτη ανοιχτή υποομάδα του $K^\times$. Τότε υπάρχει μοναδική επέκταση L/K μέσα στην K^{ab} έτσι ώστε*

$$N_{L/K}(L^\times) = H$$

Το local Artin homomorphism $\theta_K : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ απέχει πολύ από το να είναι ισομορφισμός (τοπολογικών ομάδων) αφού η $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ είναι συμπαγής, ενώ η $K^\times$ όχι. Ωστόσο, το local existence theorem μας λέει ότι παίρνουμε canonical ισομορφισμό στην προ-πεπερασμένη πλήρωση:

Θεώρημα 2.6 (Κύριο Θεώρημα LCFT)**.** *Έστω K τοπικό σώμα. Ο τοπικός ομομορφισμός Artin επάγει canonical ισομορφισμό προπεπερασμένων ομάδων*

$$\widehat{\theta}_K : \widehat{K^\times} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

$$\left(\widehat{K^\times} \cong \varprojlim_{L} K^\times/N(L^\times) \text{ και συμβατότητα στα όρια με} \right)$$

$$\big(\text{ ισομορφισμό } \theta_{L/K} : K^\times/N(L^\times) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)\big)$$

Άρα θέλουμε να καταλάβουμε το $\widehat{K^\times}$. Στην αρχιμήδεια περίπτωση είναι εύκολο: είτε τετριμμένο είτε τάξης 2. Οπότε υποθέτουμε ότι K μη-αρχιμήδειο τοπικό σώμα. Τότε μπορούμε να γράψουμε μοναδικά κάθε $x \in K^\times$ στην μορφή $u\pi^{\nu(x)}$ με $u \in \mathcal{O}_K^\times$ και $\nu(x) \in \mathbb{Z}$. Έχουμε ισομορφισμό

$$\begin{aligned} K^\times &\longrightarrow \mathcal{O}_K^\times \times \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto \left(\frac{x}{\pi^{\nu(x)}}, \nu(x)\right) \end{aligned}$$

και η προπεπερασμένη πλήρωση συμπεριφέρεται καλά με τα products άρα

$$\widehat{K^\times} \cong \mathcal{O}_K^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}$$

(απέχει πολύ από canonical, εξαρτάται από επιλογή uniformizer, uncountably many) αφού είναι ήδη profinite

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \mathbb{F}_\mathfrak{p}^\times \times (1+\mathfrak{p}) \cong \mathbb{F}_\mathfrak{p} \times \varprojlim_n \mathcal{O}_K/(1+\mathfrak{p}^n)$$

Μεταθετικό διάγραμμα ακριβών ακουλουθιών τοπολογικών ομάδων: (κάτω είναι η profinite completion της πάνω γραμμής)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathcal{O}_K^\times \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & K^\times \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\theta_K"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\phi"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{unr}}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{unr}}/K) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

$$\phi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_\mathfrak{p}) \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{unr}}/K)$$

(το ξέρω από etale) και το 1 πάει στην ακολουθία $\left(\mathrm{Frob}_{L/K}\right)$ μέσα στο

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{unr}}/K) \cong \varprojlim_L \mathrm{Gal}(L/K) \subseteq \prod_{L/K} \left(\mathrm{Gal}(L/K)\right)$$

όπου το L διατρέχει τις πεπερασμένες αδιακλάδιστες επεκτάσεις του K.

($\phi(-1)$ είναι άλλος γεννήτορας geometric Frobenius) Δηλαδή

$$\phi(1) \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{unr}}/K) \longleftrightarrow x \mapsto x^{\#\mathbb{F}_\mathfrak{p}} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_\mathfrak{p})$$

και

$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{unr}}) \cong \mathcal{O}_K^\times$ αντιστοιχεί στο inertia group του $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$. Στο διάγραμμα η πάνω ακριβής ακολουθία είναι διασπώμενη (split, όχι canonically) άρα και η κάτω, δηλαδή

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{unr}}) \times \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{unr}}/K) \cong \mathcal{O}_K^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}$$

Για κάθε επιλογή uniformizer $\pi \in \mathcal{O}_K$ έχουμε διάσπαση $K^{\mathrm{ab}} = K_\pi K^{\mathrm{unr}}$ που αντιστοιχεί σε $K^\times = \mathcal{O}_K^\times \pi^{\mathbb{Z}}$. Το K_π είναι το σύνθετο σώμα όλωςν των πλήρως διακλαδιζόμενων πεπερασμένων επεκτάσεων L/K μέσα στην K^{ab} για την οποία $\pi \in N(L^\times)$. Ισοδύναμα, K_π είναι το σταθερό σώμα από $\theta_K(\pi) \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$.

Παράδειγμα:

$$K = \mathbb{Q}_p,\ \pi = p,\ K^{\mathrm{ab}} = K_\pi K^{\mathrm{unr}}$$

όπου είναι

$$\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}} = \bigcup_n \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) \cdot \bigcup_{m \nmid p} \mathbb{Q}_p(\zeta_m)$$

το πρώτο σταθεροποιείται από $\theta_K(p)$ και το δεύτερο από $\theta_K(\mathcal{O}_K^\times)$.

Το δύσκολο είναι η κατασκευή του local Artin homomorphism.

Πρόταση 2.7. *K τοπικό σώμα και υποθέτουμε ότι κάθε πεπερασμένου δείκτη ανοιχτή υποομάδα της $K^\times$ είναι norm group. Τότε υπάρχει το πολύ ένας ομομορφισμός $\theta : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ τοπολογικών ομάδων που έχει τις ιδιότητες του local Artin homomorphism.*

Συνοψίζοντας, το LCFT μας λέει ότι για τις πεπερασμένες αβελιανές επεκτάσεις έχουμε canonical bijections μεταξύ των

(1) Πεπερασμένου δείκτη υποομάδων της $K^\times$ (που είναι απαραίτητα κανονικές).

(2) Ανοιχτές υποομάδες της $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ (που είναι απαραίτητα κανονικές και πεπερασμένου δείκτη).

(3) Πεπερασμένες επεκτάσεις του K μέσα στην K^{ab}. (που είναι απαραίτητα κανονικές).

(1) $\leftrightarrow$ (2) από $\widehat{K^\times} \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ (inclusion preserving).
(2) $\leftrightarrow$ (3) από άπειρη θεωρία Galois.
(3) $\leftrightarrow$ (1) από $L \longmapsto N(L^\times)$.

Adeles & Ideles

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$$

$$\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Το $\mathbb{Z}_p$ είναι συμπαγές και από Tychonoff το $\prod_p \mathbb{Z}_p$ είναι συμπαγές. Ωστόσο το πρόβλημα είναι ότι το locally compact δεν μεταφέρεται. Το $\mathbb{Q}_p$ είναι locally compact ενώ το $\prod_p \mathbb{Q}_p$ δεν είναι. Η όλη προσπάθεια είναι ως ένα local-global principle να δέσουμε την πληροφορία από LCFT λογαριάζοντας κάθε θέση ταυτόχρονα σε κάτι ολικό. Για αυτό το ότι το γινόμενο δεν διατηρεί το locally compact είναι πρόβλημα και περιοριζόμαστε σε κάτι λογικό (συνθήκη: εκτός από πεπερασμένες θέσεις) εκεί που δουλεύει.

Η τοπολογία γινόμενο $X = \prod X_i$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία που κάνει όλες τις προβολές $\pi_i : X \to X_i$ συνεχείς. Παράγεται από ανοιχτά της μορφής: $\pi_i^{-1}(U_i)$ με $U_i \subseteq X_i$ ανοιχτό. Κάθε ανοιχτό του X είναι ένωση ανοιχτών της μορφής: (μπορεί κενή ή άπειρη)

$$\prod_{i \in S} U_i \times \prod_{i \notin S} X_i$$

για $S \subseteq I$ επερασμένο σύνολο δεικτών. Δηλαδή, για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό έχουμε $\pi_i(U) = X_i$ εκτός από πεπερασμένα I.

Αν δεν έχουμε όλα τα X_i να είναι συμπαγή, εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό τους, τότε δεν μπορεί το γινόμενο X να είναι τοπικά συμπαγές, γιατί κανένα συμπαγές υποσύνολο $C \subseteq X$ δεν μπορεί να περιέχει μη κενό ανοιχτό, αφού αν ίσχυε θα είχαμε από συνέχεια των προβολών $\pi(C) = X_i$ συμπαγές εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό δεικτών. Για να λυθεί το πρόβηλα με το γινόμενο των σωμάτων $\mathbb{Q}_p$ θα το κάνουμε διαφορετικά να δίνει compact topological ring.

Ορισμός 3.1 (Restricted Product). *Έστω (X_i) οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(U_i) \subseteq (X_i)$ ανοιχτά. Ορίζουμε το περιορισμένο γινόμενο:*

$$\prod{}'(X_i, U_i) = \{(x_i) : \ x_i \in U_i \ \textit{σχεδόν για κάθε} \ i \in I\} \subseteq \prod X_i$$

όπου το σχεδόν για κάθε θα σημαίνει εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό δεικτών (ή θέσεων αργότερα).

Με βάση ανοιχτών

$$\mathcal{B} = \{\prod V_i : \ V_i \subseteq X_i \text{ ανοιχτό για κάθε } i \in I, \ V_i = U_i \text{ σχεδόν για κάθε } i \in I\}$$

Για κάθε i έχουμε προβολή

$$\pi_i : \prod{}'(X_i, U_i) \longrightarrow X_i$$

$$(x_i) \longmapsto x_i$$

Κάθε π συνεχής, αφού αν W_i ανοιχτό του X_i τότε $\mathfrak{p}_i^{-1}(W_i)$ είναι η ένωση των βασικών $\prod V_i \in \mathcal{B}$ με $V_i = W_i$ που είναι ανοιχτό.

Ως σύνολα:

$$\prod U_i \subseteq \prod\nolimits' (X_i, U_i) \subseteq \prod X_i$$

Γενικά η τοπολογία του restricted product δεν είναι η ίδια που μπορεί να πάρει ως υπόχωρος του $\prod X_i$, έχει περισσότερα ανοιχτά.

Παράδειγμα: το $\prod U_i$ είναι ανοιχτό στο $\prod' (X_i, U_i)$ αλλά εκτός αν $U_i = X_i$ σχεδόν για κάθε i (που αυτό θα σήμαινε $\prod X_i = \prod' (X_i, U_i)$) τότε δεν είναι ανοιχτό στο $\prod X_i$. Δεν θα ήταν ανοιχτό ούτε στο subspace topology αφού δεν περιέχει τομή του $\prod' (X_i, U_i)$ με κάποιο βασικό του $\prod X_i$.

Άρα το περιορισμένο γινόμενο είναι γενίκευση του directed product. Ταυτίζονται αν και μόνο αν $U_i = X_i$ σχεδόν για κάθε i. Αυτό ισχύει αυτόματα αν το σύνολο δεικτών είναι πεπερασμένο, οπότε μας ενδιαφέρουν τα άπειρα.

Το περιορισμένο γινόμενο δεν εξαρτάται από κάποιο U_i συγκεκριμένα. Δηλαδή μπορούμε να αλλάξουμε με V_i και αν έχουμε $U_i = V_i$ σχεδόν για κάθε i παίρνουμε όχι ισόμορφα αλλά ίσα ως σύνολα και τοπολογικοί χώροι. Δηλαδή αρκεί να προσδιορίσουμε σχεδόν όλα τα U_i.

Κάθε $x \in X := \prod' (X_i, U_i)$ ορίζει ένα (μπορεί και κενό) πεπερασμένο σύνολο $S(x) = \{i \in I : \ x_i \notin U_i\}$.

Έστω $S \subseteq I$ πεπερασμένο, ορίζουμε

$$X_S = \{x \in X : \ S(x) \subseteq S\} = \prod_{i \in S} X_i \times \prod_{i \notin S} U_i$$

Το $X_S \in \mathcal{B}$ είναι ανοιχτό, το βλέπουμε σαν τοπολογικό χώρο με δύο τρόπους. Σαν υπόχωρο του X και σαν direct product κάποιων X_i, U_i.

Περιορίζουμε την βάση $\mathcal{B}$ του X στο X_S και μας δίνει

$$\mathcal{B}_S = \{\prod V_i : \ V_i \subseteq \pi(X_S) \text{ ανοιχτό}, \ V_i = U_i = \pi(X_S) \text{ σχεδόν για κάθε } i\}$$

που είναι η συνήθης βάση της τοπολογίας γινόμενο, δηλαδή οι δύο τοπολογικοί χώροι ταυτίζονται. Έχουμε $X_S \subseteq X_T$ για $S \subseteq T$ άρα έχουμε μερική διάταξη στα $S \subseteq I$ και τα

$$\{X_S : \ S \subseteq I \text{ πεπερασμένο }\}$$

με inclusion maps

$$\{i_{ST} : X_S \hookrightarrow X_T : \ S \subseteq T\}$$

είναι ενά ευθύ σύστημα με ευθύ όριο

$$\varinjlim X_S = \coprod X_S / \sim$$

με την σχέση ισοδυναμίας $x \sim i_{ST}(x)$ για κάθε $x \in S \subseteq T$. Το ευθύ όριο είναι canonically ισομορφικό με το περιορισμένο γινόμενο.

Πρόταση 3.2. *Έστω $(X_i) \supseteq (U_i)$, $X = \prod' (X_i, U_i)$ και για κάθε $S \subseteq I$ έχουμε τα*

$$X_S := \prod_{i \in S} X_i \times \prod_{i \notin S} U_i \subseteq X$$

και inclusion maps $i_{ST} : X_S \overset{X}{\hookrightarrow}_T$ *και* $\varinjlim_S X_S$ *το ευθύ όριο. Τότε υπάρχει canonical ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων*

$$\phi : X \longrightarrow \varinjlim_S X_S$$

$$x \longmapsto [x]_{X_{S(x)}}$$

όπου $X_{S(x)} \subseteq \coprod X_S$ *μέσα στο ευθύ όριο* $\coprod X_S/\sim$, *και* $S(x) = \{i \in I : \ x_i \notin U_i\}$.

Interest: Αν (X_i) τοπικά συμπαγείς χώροι, (U_i) σχεδόν όλα συμπαγείς, τότε έχουμε ότι $\prod'(X_i, U_i)$ τοπικά συμπαγείς.

Ring of Adeles: Θυμίζουμε ένα Global Field K είναι μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$ ή του $\mathbb{F}_p(t)$. Έχουμε M_K σύνολο θέσεων, για ένα $v \in M_K$ το αντίστοιχο K_v τοπικό σώμα. Αν v μη αρχιμήδειο, τότε $\mathcal{O}_v$ είναι ο δακτύλιος εκτίμησης του K_v. Για αρχιμήδεια θέση v θέτουμε $\mathcal{O}_v := K_v$.

Ορισμός 3.3 (Adele Ring). *Έστω K global σώμα, ο δακτύλιος των adeles του K είναι το περιορισμένο γινόμενο*

$$A_K = \prod_{v \in M_K}{}' (K_v, \mathcal{O}_v)$$

που το βλέπουμε σαν υποσύνολο (και όχι υπόχωρο!) του $\prod_v K_v$. *Πράγματι*

$$A_K = \{(a_v) \in \prod K_v : \ a_v \in \mathcal{O}_v \text{ εκτός από πεπερασμένα } v\}$$

Παρατήρηση: Όσο για την τοπολογία που θα έχει, παίρνουμε την ίδια όπως και να ορίσουμε το $\mathcal{O}_v$ στις πεπερασμένες αρχιμήδειες θέσεις. Αλλά, θα θέλαμε κάθε $\mathcal{O}_v$ να είναι τοπολογικός δακτύλιος, οπότε έχει νόημα αυτή η επιλογή.

Για $a \in A_K$, το a_v είναι η προβολή στο K_v και έτσι ο A_K γίνεται δακτύλιος με πράξεις κατά συντεταγμένη. Επίσης για κάθε S πεπερασμένο σύνολο θέσεων έχουμε υποδακτύλιο S-adeles:

$$A_{K,S} := \prod_{v \in S} K_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v$$

ευθύ γινόμενο τοπολογικών δακτυλίων, και από πρόταση $A_K \cong \varinjlim_S A_{K,S}$, δηλαδή είναι πράγματι τοπολογικός δακτύλιος.

$$A_K = \varinjlim_S \prod_{v \in S} K_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v$$

Έχουμε μια canonical εμφύτευση $K \hookrightarrow A_K$ που επάγεται από την $K \hookrightarrow K_v$

$$x \longmapsto (x, x, x, \ldots)$$

Για κάθε $x \in K$ έχουμε $x \in \mathcal{O}_v$ σχεδόν για κάθε v. Η εικόνα του K στο A_K είναι ο υποδακτύλιος των principal adeles (και είναι σώμα).

Επεκτείνουμε την $||\cdot||_v$ του K_v στο A_K ως

$$||a||_v = ||a_v||_v$$

και ορίζουμε την adelic absolute value (ή νόρμα)

$$||a|| := \prod_{v \in M_K} ||a||_v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

που τείνει στο 0 εκτός αν $||a||_v = 1$ σχεδόν για κάθε v, στην οποία περίπτωση είναι πεπερασμένο γινόμενο.

Για κάθε principal adele a, έχουμε $a \in K^\times$ και $||a|| = 1$ από product formula.

Παράδειγμα $K = \mathbb{Q}$ και $A_\mathbb{Q}$ είναιη ένωση των δακτυλίων με τοπολογία του restricted product (όχι του $\prod\limits_{p \leq \infty} \mathbb{Q}_p$).

$$\mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p$$

όπου το S διατρέχει τα πεπερασμένα σύνολα των πρώτων (θέσεων). Ισοδυναμα

$$A_\mathbb{Q} = \{a \in \prod_{p \leq \infty} \mathbb{Q}_p : \ ||a||_p \leq 1 \text{ σχεδόν για κάθε } p\}$$

Πρόταση 3.4. *Ο δακτύλιος των adeles A_K ενός global σώματος K είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff.*

Το τοπικά συμπαγής προκύπτει από το περιορισμένο γινόμενο, αφού το K_v είναι τοπικά συμπαγής και όλα εκτός από πεπερασμένα $\mathcal{O}_v$ είναι δακτύλιοι εκτίμησης για μη αρχιμήδεια τοπικά σώματα, δηλαδή είναι συμπαγής ως κλειστή μπάλα

$$\mathcal{O}_v = \{x \in K : \ ||x||_v \leq 1\}$$

Το $\prod\limits_v K_v$ είναι Hausdorff, αφού είναι κάθε K_v και η τοπολογία του A_K είναι λεπτότερη της τοπολογίας γινόμενο που μπορεί να πάρει το A_K ως υπόχωρος, άρα αφού ανοιχτά διαχωρίζουν ανοιχτά στην κάτω θα ισχύει και στην πάνω τοπολογία.

Συμπεριφορά του δακτυλίου των adeles κάτω από αλλαγή βάσης:

Εφόσον $K \hookrightarrow A_K$ μπορούμε να δούμε το A_K ως διανυσματικό χώρο πάνω από το K, όπως και μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση L/K.Άρα το

$$A_K \otimes_K L$$

είναι ένας L-διανυσματικός χώρος. Ως τοπολογικός χώρος, το $A_K \otimes_K L$ παίρνει την τοπολογία γινόμενο από $[L : K]$ αντίγραφα του A_K.

Πρόταση 3.5. *Έστω L/K πεπερασμένη διαχωρίσιμη, K global. Τότε υπάρχει φυσιολογικός ισομορφισμός τοπολογικών δακτυλίων*

$$A_L \cong A_K \otimes_K L$$

με μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & K \otimes_K L \arrow[d] \\
A_L \arrow[r, "\cong"] & A_K \otimes_K L
\end{tikzcd}$$

Πόρισμα 3.6. *Έστω L/K πεπερασμένη διαχωρίσιμη, K global, με $[L : K] = n$ υπάρχει φυσιολογικός ορισμός τοπολογικών K-διανυσματικών χώρων (και τοπικά συμπαγών ομάδων)*

$$A_L \cong A_K \oplus \cdots \oplus A_K$$

n το πλήθος αντίγραφα. Περιορίζοντας, παίρνουμε ισομορφισμό στα principal adeles

$$L \cong K \otimes \cdots \otimes K$$

του A_L με n το πλήθος αντίγραφα ευθύ άθροισμα των principal adeles του A_K.

Θεώρημα 3.7. *Για κάθε global L τα κύρια adeles $L \subseteq A_L$ αποτελούν μια διακριτή cocompact (δες widipedia: cocompact group action δράση σε τοπολογικό χώρο κάνει τον χώρο πηλίκο συμπαγής. Αν ο χώρος είναι ήδη τοπικά συμπαγής είναι ισοδύναμο ότι υπάρχει ένας συμπαγής υπόχωρος στον οποίο η δράση της ομάδας καλύπτει όλον τον χώρο) υποομάδα της προσθετικής ομάδας του δακτυλίου A_L.*

Πόρισμα 3.8. *K global, τότε A_K/K συμπαγές.*

Ορισμός 3.9 (Idele group)**.**

$$A_K^\times = \{(a_v) \in A_K : \ a_v \in K_v^\times \text{ για κάθε θέση } v \in M_K, \ a_v \in \mathcal{O}_v^\times \text{ σχεδόν για κάθε } v\}$$

Δηλαδή, $\mathcal{O}_v^\times = K_v^\times \cap \mathcal{O}_v$ είναι η ομάδα ανστιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου εκτίμησης του K_v όταν το v είναι μη-αρχιμήδειο, ενώ για v αρχιμήδεια θέση είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}^\times$ ή $\mathbb{C}^\times$.

Από προηγούμενη παρατήρηση, το A_K δεν εξαρτάται από την επιλογή του $\mathcal{O}_v$ στις πεπερασμένες το πλήθος αρχιμήδειες θέσεις του K, αλλά η επιλογή που κάναμε συνεισφέρει ώστε κάθε $\mathcal{O}_v^\times$ να είναι τοπολογική ομάδα.

Ως υπόχωρος το $A_K^\times$ του A_K δεν είναι τοπολογική ομάδα, καθώς γενικά για τοπολογικούς δακτυλίους δεν μπορούμε να απαιτούμε η πράξη $a \mapsto a^{-1}$ να είναι συνεχής. Θα είχε νόημα αυτό στα τοπολογικά σώματα.

Παράδειγμα: $K = \mathbb{Q}$ και για κάθε p ορίζουμε

$$a(p) = (1, 1, 1, \ldots, 1, \underbrace{p}_{p\text{-θέση}}, 1, \ldots) \in A_\mathbb{Q}$$

το adele με $a(p)_p = p$ και $a(p)_q = 1$ για κάθε $q \neq p$. Κάθε βασικό ανοιχτό U στο $A_\mathbb{Q}$ έχει μορφή

$$U = \prod_{v \in S} U_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v$$

με $S \subseteq M_\mathbb{Q}$ πεπερασμένο και $1_v \in U_v$. Το U περιέχει το $a(p)$ για κάθε αρκετά μεγάλο p. Δηλαδή, $\lim\limits_{p\to\infty} a(p) = 1$ στην τοπολογία του $A_\mathbb{Q}$. Αλλά, το U δεν περιέχει το $a(p)^{-1}$ για κάθε αρκετά μεγάλο p.

$$\lim_{p\to\infty} a(p)^{-1} \neq 1^{-1} \in A_\mathbb{Q}$$

Άρα $a \mapsto a^{-1}$ δεν μπορεί να είναι συνεχής.

Η λύση είναι να δούμε για τοπολογικό δακτύλιο R το $R^\times$ με την ασθενέστερη τοπολογία που το κάνει ομάδα, δηλαδή το $R^\times$ εμφυτευμένο στο $R \times R$ μέσω

$$\phi : R^\times \longrightarrow R \times R$$

$$r \longmapsto (r, r^{-1})$$

δηλαδή

$$\phi : R^\times \longrightarrow \phi(R^\times)$$

είναι ομοιομορφισμός, όπου η εικόνα έχει την τοπολογία ως υπόχωρος του $R \times R$ και έτσι η $r \mapsto r^{-1}$ είναι συνεχής ως σύνθεση της ϕ με την δεύτερη προβολή.

Στην περίπτωση του $A_K^\times$ η παραπάνω τοπολογία που παίρνουμε έχει βάση με ανοιχτά της μορφής:

$$U' = \prod_{v\in S} U_v \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v^\times$$

όπου $U_v \subseteq K_v^\times$ και $S \subseteq M_K$ πεπερασμένο.

Αυτό φαίνεται καθώς $\phi : A_K^\times \to A_K \times A_K$ από ορισμό κάθε $\phi(a) = (a, a^{-1})$ βρίσκεται σε ένα γινόμενο $U \times V$ βασικών $U, V \subseteq A_K$, δηλαδή $U, V \subseteq A_K$. Άρα a, a^{-1} βρίσκονται στο $\mathcal{O}_v$ και άρα στο $\mathcal{O}_v^\times$ σχεδόν για κάθε v. Τα U' είναι ακριβώς τα ανοιχτά του περιορισμένου γινομένου $\prod'(K_v^\times, \mathcal{O}_v^\times)$. Οπότε οδηγούμαστε στον ορισμό:

Ορισμός 3.10 (Idele group)**.** *Έστω K global σώμα, το idele group του K είναι η τοπολογική ομάδα*

$$\mathbb{I}_K := \prod_v{}' (K_v^\times, \mathcal{O}_v^\times)$$

με πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη, το οποίο βλέπουμε σαν την υποομάδα $A_K^\times$ του A_K με την τοπολογία περιορισμένου γινομένου και όχι υποχώρου.

Το canonical embedding $K \hookrightarrow A_K$ περιορίζεται σε $K^\times \hookrightarrow \mathbb{I}_K$ και έτσι ορίζουμε την τοπολογική ομάδα:

Ορισμός 3.11 (Idele Class Group)**.**

$$C_K := \mathbb{I}_K / K^\times$$

Παράδειγμα: Το $(a(p))$ όπως ορίστηκε πριν βρίσκεται στο $A_\mathbb{Q}^\times$ και συγκλίνει στο $1 \in A_\mathbb{Q}^\times$ κάτω από την τοπολογία υποχώρου, αλλά δεν συγκλίνει στο 1 στην τοπολογία του $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$. Πράγματι, θεωρούμε το βασικό

$$\prod_v \mathcal{O}_v^\times = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{R}^\times$$

του $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$ που είναι περιοχή του 1. Κανένα από τα

$$a(p) = (1, 1, 1, \ldots, 1, \underbrace{p}_{p\text{-θέση}}, 1, \ldots)$$

δεν βρίσκεται σε αυτό, άρα δεν μπορεί η ακολουθία $(a(p))$ να συγκλίνει στο 1 στο $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$. Άρα δεν μπορεί να συγκλίνει καν, γιατί αν είχε όριο θα έπρεπε να είναι το ίδιο με της τοπολογίας υποχώρου. Βάζοντας περισσότερα ανοιχτά στο $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$ ώστε να διορθώνεται το θέμα με την $x \mapsto x^{-1}$ γίνεται δυσκολότερο να συγκλίνουν οι ακολουθίες.

Υπενθυμίζουμε I_K είναι το ideal group και ορίζουμε επιμορφισμό:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_K &\longrightarrow I_K \\ a &\longmapsto \prod \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(a)} \end{aligned}$$

Όπου το γινόμενο διατρέχει τους πρώτους του K και $\nu_\mathfrak{p}(a) = \nu_\mathfrak{p}(a_v)$ όπου v είναι η κλάση ισοδυναμίας της p-αδικής απόλυτης τιμής $||\cdot||_\mathfrak{p}$.

Η σύνθεση

$$K^\times \hookrightarrow \mathbb{I}_K \longrightarrow I_K$$

έχει εικόνα P_K, δηλαδή την υποομάδα των κύριων κλασματικών ιδεωδών. Έπεται ότι έχουμε επιμορφισμό στα πηλίκα:

$$C_K = \mathbb{I}_K / K^\times \longrightarrow Cl_K = I_K / P_K$$

Οπότε έχουμε μεταθετικό διάγραμμα ακριβών ακολουθιών:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K^\times \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathbb{I}_K \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & C_K \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & P_K \arrow[r, hook] & I_K \arrow[r, two heads] & Cl_K \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 3.12. *Έστω K global σώμα, τότε το idele group $\mathbb{I}_K$ είναι τοπικά συμπαγής ομάδα.*

Η απόδειξη είναι ότι για Hausdorff έχει μια λεπτότερη τοπολογία από την τοπολογία υποχώρου $A_K^\times \subseteq A_K$. Στη συνέχεια, για κάθε μη αρχιμήδειο v, το $\mathcal{O}_v^\times = \{x \in K_v^\times \mid \, ||x||_v = 1\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\mathcal{O}_V$, δηλαδή συμπαγές. Αυτό ισχύει σχεδόν για κάθε θέση $v \in M_K$ και τα $K_v^\times$ είναι τοπικά συμπαγή. Άρα από τις ιδιότητες του περιορισμένου γινομένου το $\prod'(K_v^\times, \mathcal{O}_v^\times) = \mathbb{I}_K$ είναι τοπικά συμπαγής.

Πρόταση 3.13. *Έστω K global σώμα, τότε το $K^\times$ είναι διακριτή υποομάδα του $\mathbb{I}_K$. (Υπενθύμιση: διακριτή σημαίνει η τοπολογία που παίρνει ως υπόχωρος είναι η διακριτή που είναι όλα ανοιχτά. Ισοδύναμα στην μεγάλη τοπολογία τα στοιχεία του υποχώρου είναι σε ανοιχτά που είναι μονοσύνολα)*

Είδαμε ότι K διακριτή cocompact υποομάδα της A_K, και άρα πηλίκο A_K/K συμπαγές. Είναι φυσιλογικό να ρωτήσουμε αν $K^\times$ είναι cocompact στο $A_K^\times$ (τοπολογία υπόχωρος) ή στο $\mathbb{I}_K$. Η απάντηση είναι όχι, δηλαδή το idele class group C_K είναι τοπικά συμπαγής αλλά όχι συμπαγής.

Θυμίζουμε $||a|| := \prod\limits_v ||a||_v$ είναι η adelic norm. Περιορίζοντας, έχουμε συνεχή ομομορφισμό τοπολογικών ομάδων

$$|| \cdot || : \mathbb{I}_K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^\times$$
$$a \longmapsto ||a||$$

και $||a|| > 0$ για τα $a \in \mathbb{I}_K$ καθώς $a_v \in \mathcal{O}_n^\times$ σχεδόν για κάθε $v \in M_K$, δηλαδή $||a||_n = 1$ σχεδόν για κάθε v. Άρα το $\prod\limits_v ||a||_v$ είναι πεπερασμένο γινόμενο και μη-μηδενικό αφού $a_v \in K_v^\times$ για κάθε $v \in M_K$.

Ο πυρήνας $\ker || \cdot || = \{a \in \mathbb{I}_K \mid \, ||a|| = 1\} := \mathbb{I}_K^1$ ονομάζεται η ομάδα των 1-ideles και από procuct formula περιέχει το $K^\times$. Είναι χρήσιμο για αυτήν την ομάδα ότι οι τοπολογίες ως υπόχωρος του A_K και ως υπόχωρος του $\mathbb{I}_K$ που έχει την τοπολογία περιορισμένου γινομένου ταυτίζονται.

Global CFT

Υπενθυμίζουμε global σώμα είναι ένα σώμα με product formula τέτοια ώστε οι πληρώσεις σε μη τετριμμένες απόλυτες τιμές δίουν τοπικά σώματα. Τα global σώματα είναι οι πεπερασμένες επεκτάσεις του $\mathbb{Q}$ και του $\mathbb{F}_p(t)$ (θετικής χαρακτηριστικής).

να βάλω εδώ ένα recap ορισμών.

Ορισμός 4.1. *Έστω L/K πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση global σωμάτων. Η Idele norm ορίζεται ως*

$$N_{L/K} : \mathbb{I}_L \longrightarrow \mathbb{I}_K$$
$$N_{L/K}(b_w) = (a_v)$$

όπου $a_v = \prod_{w|v} N_{L_w/K_v}(b_w)$ όπου το γινόμενο διατρέχει τις θέσεις w του L που επεκτείνουν το v του K και $N_{L_w/K_v} : L_w \to K_v$ είναι η νόρμα σωμάτων που αντιστοιχεί στην διαχωρίσιμη επέκταση των τοπικών σωμάτων L_w/K_v.

Υπενθύμιση για το παραπάνω, από αλγεβρική θεωρία αριθμών έχουμε για σταθερό v:

$$N_{L/K}(a) = \prod_{w|v} N_{L_w/K_v}(a)$$

Έχουμε μέχρι τώρα:

$$N_{L/K} : L^\times \longrightarrow K^\times$$
$$N_{L/K} : \mathbb{I}_L \longrightarrow \mathbb{I}_K$$

ταυτίζονται στην υποομάδα των κυρίων ideles $L^\times \subseteq \mathbb{I}_L$. Επιπλέον, η ideal norm είναι compatible με την νόρμα σωωμάτων

$$N_{L/K}((a)) = \big(N_{L/K}(a)\big) : I_L \longrightarrow I_K$$

Άρα έχουμε μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} L^\times \arrow[r] \arrow[d, "N_{L/K}"'] & \mathbb{I}_L \arrow[r] \arrow[d, "N_{L/K}"] & I_L \arrow[d, "N_{L/K}"] \\ K^\times \arrow[r] & \mathbb{I}_K \arrow[r] & I_K \end{tikzcd}$$

Η εικόνα του $L^\times$ στο $\mathbb{I}_L$ κάτω από την σύνθεση στην πάνω γραμμή είναι ακριβώς τα P_L κύρια ιδεώδη. Όμοια, η κάτω εικόνα φτάνει στα κύρια P_K. Άρα παίρνοντας πηλίκα, επάγονται norm maps στα idele και ideal class groups

$$\begin{tikzcd} C_L \arrow[r, two heads] \arrow[d, "N_{L/K}"'] & Cl_L \arrow[d, "N_{L/K}"] \\ C_K \arrow[r, two heads] & Cl_K \end{tikzcd}$$

Κατασκευή global Artin ομομορφισμού:

Σταθεροποιούμε K^{sep} ενός global K και για κάθε v του K σταθεροποιούμε K_v^{sep} του τοπικού K_v. Έχουμε ότι K^{ab} και K_v^{ab} είναι οι μέγιστες αβελιανές επεκτάσεις που βρίσκονται μέσα στις διαχωρίσιμες θήκες που διαλέξαμε. Όλες πλέον οι αβελιανές επεκτάσεις του K και του K_v θα βρίσκονται μέσα σε αυτές. Από θεώρημα, το K_v είναι εφοδιασμένο με τον τοπικό Artin ομομορφισμό:

$$\theta_{K_v} : K_v^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{ab}}/K_v)$$

και για κάθε πεπερασμένη αβελιανή L/K και κάθε $w \mid v$ του L, συνθέτοντας με την φυσική απεικόνιση

$$\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{ab}}/K_v) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_w/K_v)$$
$$\sigma \longmapsto \sigma|_{L_w}$$

παίρνουμε τον επιμορφισμό

$$\theta_{L_w/K_v} : K_v^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_w/K_v)$$

με πυρήνα

$$N_{L_w/K_v}(L_w^\times)$$

Όταν K_v μη αρχιμήδειο και L_w/K_v αδιακλάδιστη, τότε $\theta_{L_w/K_v}(\pi_v) = \mathrm{Frob}_{L_w/K_v}$ για κάθε uniformizer π_v του K_v

(Από θεώρημα, κάθε πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του K_v είναι της μορφής L_w για κάποιο $w \mid v$.)

Ορίζουμε

$$\phi_w : \mathrm{Gal}(L_w/K_v) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$
$$\sigma \longmapsto \sigma|_L$$

Αν v αρχιμήδεια θέση τότε $\phi_w(\mathrm{Gal}(L_w/K_v))$ είναι τετριμμένη ή παράγεται από involution που αντιστοιχεί στο $L_w \cong \mathbb{C}$. Αν v μη αρχιμήδεια και q του L που αντιστοιχεί στο $w \mid v$ τότε $\phi_w(\mathrm{Gal}(L_w/K_v))$ είναι η ομάδα διάσπασης $D_q \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$.

Γενικά για κάθε v του K η $\mathrm{Gal}(L/K)$ δρα στο σύνολο $\{w \mid v\}$ ως $|a|_{\sigma(w)} := |\sigma(a)|_w$ και $\phi_w(\mathrm{Gal}(L_w/K_v))$ είναι το stabilizer της δράσης αυτής, άρα έχει νόημα να πούμε για decomposition group. Για τα $w \mid v$ τα $\phi_w(\mathrm{Gal}(L_w/K_v))$ είναι αναγκαστικά συζυγή και άρα ίσα σε αβελιανό setting.

$$\phi_w \circ \theta_{L_w/K_v} \text{ ορίζει } K_v^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

ανεξάρτητα από την επιλογή $w \mid v$. Όταν το v είναι αδιακλάδιστο μη αρχιμήδειο, τότε έχουμε

$$\phi_w(\theta_{L_w/K_v}(\pi_v)) = \mathrm{Frob}_v$$

για κάθε uniformizer π_v του K_v και αυτό καθορίζει το $\phi_w \circ \theta_{L_w/K_v}$, αφού το π_v παράγει το $K_v^\times$.

Για κάθε θέση v του K: Εμφυτεύουμε το κάθε τοπικό $K_v^\times$ στα idele $\mathbb{I}_K$.

$$i_v : K_v^\times \hookrightarrow \mathbb{I}_K$$
$$a \mapsto (1, 1, \ldots, 1, \underbrace{a}_{v\text{-θέση}}, 1, \ldots)$$

με εικόνα που τέμνει το $K^\times$ τετριμμένα. Αυτή η εμφύτευση είναι compatible με idele norm ως:

Έστω L/K πεπερασμένη διαχωρίσιμη και $w \mid v$. Τότε το διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
L_w^\times \arrow[r, "N_{L_w/K_v}"] \arrow[d, hook, "i_w"] & K_v^\times \arrow[d, hook, "i_v"] \\
\mathbb{I}_L \arrow[r, "N_{L/K}"] & \mathbb{I}_K
\end{tikzcd}$$

Για L/K αβελιανή, για κάθε v του K διαλέγουμε $w \mid v$ και

$$\theta_{L/K} : \mathbb{I}_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

$$(a_v) \longmapsto \prod_v \phi_w(\theta_{L_w/K_v}(a_v))$$

που οι όροι στο γινόμενο είναι ανεξάρτητοι της επιλογής $w \mid v$ και το γινόμενο βρίσκεται μέσα στην $\mathrm{Gal}(L/K)$. Είναι καλά ορισμένο γινόμενο αφού $a_v \in \mathcal{O}_v^\times$ και το v είναι αδιακλάδιστο σχεδόν για κάθε v. Συνεπώς

$$\phi_w(\theta_{L_w/K_v}(a_v)) = \mathrm{Frob}_v^{\nu(a_v)} = 1$$

Το $\theta_{L/K}$ είναι ομομορφισμός αφού κάθε $\phi_w \circ \theta_{L_w/K_v}$ είναι και $\theta_{L/K}$ είναι συνεχής αφού ο πυτήνας είναι ένωση ανοιχτών: Το $(a_v) = a \in \ker \theta_{L/K}$ βρίσκεται σε ανοιχτό

$$U_a = U_S \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v^\times \subseteq \ker \theta_{L/K}$$

όπου το S περιέχει όλα τα διακλαδιζόμενα v και όλα τα v που $a_v \notin \mathcal{O}_v^\times$. Το U_S είναι ο πυρήνας της

$$(a_v)_{v \in S} \longmapsto \prod_{v \in S} \phi_w(\theta_{L_w/K_v}(a_v))$$

που το δεξί είναι ανοιχτό στο $\prod\limits_{v \in S} K_v^\times$.

Αν $L_1 \subseteq L_2$ είναι δύο πεπερασμένες αβελιανές επεκτάσεις πάνω από το K, τότε

$$\theta_{L_1/K}(a) = \theta_{L_2/K}(a)|_{L_1}$$

για κάθε $a \in \mathbb{I}_K$. Τα $\theta_{L/K}$ έτσι αποτελούν συμβατό σύστημα ομομορφισμών από το $\mathbb{I}_K$ στο αντίστροφο όριο

$$\varprojlim_L \mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

όπου το L διατρέχει τις πεπερασμένες αβελιανές επεκτάσεις μέσα στο K^{ab}, με διάταξη του περιέχεσθαι. Από την καθολική ιδιότητα του profinite completion παίρνουμε μοναδικά καθορισμένο συνεχή ομομορφισμό:

Ορισμός 4.2. *Έστω K global σώμα. Ο global Artin ομομορφισμός είναι ο συνεχής*

$$\theta_K : \mathbb{I}_K \longrightarrow \varprojlim_L \mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

που ορίζεται από το συμβατό σύστημα ομομορφισμών

$$\theta_{L/K} : \mathbb{I}_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

όπου το L διατρέχει τις πεπερασμένες αβελιανές επεκτάσεις του K μέσα στο K^{ab}.

Το $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \cong \varprojlim \mathrm{Gal}(L/K)$ είναι ο φυσιολογικός ισομορφισμός μεταξύ της ομάδας Γκαλουά και της προπεπερασμένης πλήρωσης, ως προς την τοπολογία Krull. Είναι canonical όπως και ο global Artin ομομορφισμός.

Πρόταση 4.3. *Έστω K global. Ο θ_K global Artin ομομορφισμός είναι ο μοναδικός συνεχής ομομορφισμός $\mathbb{I}_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ τέτοιος ώστε για κάθε πεπερασμένη αβελιανή επέκταση L/K μέσα στην K^{ab} και κάθε θέση w του L με $w \mid v$ του K, το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
K_v^\times \arrow[r, "\theta_{L_w/K_v}"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gal}(L_w/K_v) \arrow[d, hook, "\phi_w"] \\
\mathbb{I}_K \arrow[r, "\theta_{L/K}"] & \mathrm{Gal}(L/K)
\end{tikzcd}$$

όπου $\theta_{L/K}(a) = \theta_K(a)|_L$.

4.1 Κύρια Θεωρήματα Global CFT

To idele class group $C_K = \mathbb{I}_K/K^\times$ παίρνει τον ρόλο του $K_v^\times$ στο local Artin reciprocity.

Θεώρημα 4.4 (Global Artin Reciprocity)**.** *Έστω K Global, ο πυρήνας του global Artin ομομορφισμού περιέχει το $K^\times$ και άρα έχουμε συνεχή ομομορφισμό:*

$$\theta_K : C_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

με την ιδιότητα ότι για κάθε πεπερασμένη αβελιανή επέκταση L/K στην K^{ab} ο ομομορφισμός

$$\theta_{L/K} : C_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

που τον αποκτάμε συνθέτοντας με την φυσική προβολή $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \to \mathrm{Gal}(L/K)$ είναι επί με πυρήνα $N_{L/K}(C_L)$ και άρα επάγει ισομορφισμό:

$$C_K/N_{L/K}(C_L) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$$

Θεώρημα 4.5 (Global Existence Theorem)**.** *Έστω K global, για κάθε πεπερασμένου δείκτη ανοιχτή υποομάδα $H \leq C_K$ υπάρχει μοναδική αβελιανή επέκταση L/K στην K^{ab} για την οποία ισχύει*

$$N_{L/K}(C_L) = H$$

και όμοια με local Artin version με profinite completion παίρνουμε ισομορφισμό που συνοψίζει global cft σε μια πρόταση:

Θεώρημα 4.6 (Main Theorem of Global CFT)**.** *Έστω K global, ο global Artin ομομορφισμός επάγει canonical ισομορφισμό τοπολογικών ομάδων:*

$$\widehat{\theta_K} : \widehat{C_K} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

Άρα έχουμε inclusion reversing bijection:

$$\{\textit{finite index open } H \leq C_K\} \longleftrightarrow \{\textit{finite abelian } L/K \textit{ in } K^{\mathrm{ab}}\}$$

$$H \longmapsto (K^{\mathrm{ab}})^{\theta_K(H)}$$
$$N_{L/K}(C_L) \longleftarrow L$$

και αντίστιχους ισομορφισμούς

$$C_K/H \cong \mathrm{Gal}(L/K)$$

με $H = N_{L/K}(C_L)$.

Θεώρημα 4.7 (Functoriality)**.** *Έστω K global, L/K πεπερασμένη διαχωρίσιμη (όχι αβελιανή απαραίτητα). Τότε το διάγραμμα είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd}
C_L \arrow[r, "\theta_L"] \arrow[d, "N_{L/K}"] & \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/L) \arrow[d] \\
C_K \arrow[r, "\theta_K"] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)
\end{tikzcd}$$